Тәжірибелік сабақ

Тақырып 7. Жазықтықтар. Жазықтықтардың арасындағы бұрышты есептеу. Жазықтықтардың орналасуы. Кеңістіктегі түзу теңдеуі. Екі түзу арасындағы бұрышты есептеу. Түзулердің орналасуы. Түзу мен жазықтықтың орналасуы.

1. M_1, (1, 5, -7,), M_2 (-3,6,3), M_3(-2,7,3), M_0(1,-1,2) нүктелері берілген. M_0 нүктесінен M_1, M_2, M_3 нүктелері арқылы өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңыз.

Шешуі: Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін қолданып,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-(-7) \\ -3-1 & 6-5 & 3-(-7) \\ -2-1 & 7-5 & 3-(-7) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{немесе} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

немесе $10(x-1)-30(y-5)-8(z+7)+3(z+7)+40(y-5)-20(x-1)=0$

$-10(x-1)+10(y-5)-5(z+7)=0 \Rightarrow \; 2(x-1)-2(y-5)+(z+7)=0$

$2x-2y+z+15=0$ - M_1, M_2, M_3 нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін аламыз. M_0 нүктесінен жазықтыққа дейінгі d қашықтығын есептейміз:

$$d = \frac{|2\cdot 1-2(-1)+2+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}} = \frac{21}{3} = 7$$

Жауабы: d=7

2. A(2, 5, -3), B(7, 8, -1), C(9, 7, 4) нүктелері берілген. A нүктесі арқылы өтетін $\overline{BC}$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуін табыңыз.

Шешуі. $\overline{BC} = \{9-7, 7-8, 4-(-1)\} = \{2, -1, 5\}$ векторын тауып, ізделінді жазықтықтың нормаль векторы ретінде аламыз. Ендеше A нүктесі арқылы өтетін $\overline{BC}$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуі:

$$2(x-2)-(y-5)+5(z-(-3))=0$$

$$2x-4-y+5+5z+15=0$$

$$2x-y+5z+16=0$$

Жауабы: $2x-y+5z+16=0$

3. $P_1: x+2y-2z=0 \quad P_2: x+y-35=0$ жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңыз.

Шешуі. Берілген жазықтықтардың нормаль векторларын жазайық: $\overline{n_1} = \{1, 2, -2\}$ $\quad \overline{n_2} = \{1, 1, 0\}$. Онда векторлардың арасындағы бұрышты анықтау формуласынан

$$cos\varphi = \frac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|} = \frac{1\cdot 1+2\cdot 1+(-2)\cdot 0}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^0$$

жазықтықтардың арасындағы бұрышты анықтаймыз.

Жауабы: $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^0$

4. $e: \begin{cases} 2x - 3y - 2z + 6 = 0 & : p_1 \\ x - 3y + z + 3 = 0 & : p_2 \end{cases}$ түзуінің канондық теңдеуін жазыңыз:

Шешуі: e түзуі екі жазықтықтың қиылысу сызығы ретінде жалпы теңдеуімен берілген. Ендеше p_1 және p_2 жазықтықтарының нормаль векторлары сәйкес $\bar{n}_1 = \{2,-3,-2\}$ және $\bar{n}_2 = \{1,-3,1\}$ – ге тең. $\begin{matrix} \bar{n}_1 \perp \bar{p}_1 \Rightarrow \bar{n}_1 \perp e \\ \bar{n}_2 \perp \bar{p}_2 \Rightarrow \bar{n}_2 \perp e \end{matrix}$

$\Rightarrow$ e түзуі үшін $\overline{a} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$ векторы бағыттаушы вектор болғандықтан, оның координаталары $\bar{a} = \left\{ \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right\} = \{-3-6; -(2+2), -6+3\} = \{-9,-4,-3\}$.

e түзуінің берілген теңдеуінен оған тиісті бір нүктенің координаталарын $z = 0$ деп ұйғарып, $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x - 3y = -3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 1-теңдеуден 2-теңдеуді шегеріп, 2-теңдеуден y-ті анықтайық: $\begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{x+3}{3} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Сөйтіп, координаталары (-3;0;0) нүктесі түзуге тиісті.

Онда табылған вектор мен нүктені ескеріп, түзудің канондық теңдеуін жазуға болады: $\frac{x-(-3)}{-9} = \frac{y-0}{-4} = \frac{z-0}{-3}$. $\overline{a}$ векторын оған коллинеар $-\overline{a}$ векторымен ауыстырып, $\frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ аламыз.

Жауабы: $\frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

5. $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$ түзуі мен $2x + y + 7z - 3 = 0$ жазықтығының қиылысу нүктесін табыңыз.

Шешуі. Түзудің канондық теңдеуінен параметрлік теңдеуіне көшіп, $\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ және түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін табу үшін мына жүйені шешуіміз керек:

$$\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 2t \\ 2x + y + 7z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 2t \\ 14 + 6t + 3 + t - 7 - 14t - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 2t \\ -7t = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 10 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{cases}$$

Жауабы: A(10, 4, -3)- түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі.

6. e: $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}$ түзуіне қарағанда M(2,-5,7) нүктесіне симметриялы M$^{/}$ нүктесін табыңыз.

Шешуі. e түзуіне перпендикуляр M нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін оның нормаль векторы ретінде $\bar{a}(1,3,2)$ бағыттаушы векторын аламыз: 1(x-2)+3(y+5)+2(z -7)=0$\Rightarrow p: x+3y+2z-1=0$. e түзуі мен p жазықтығының қиылысу нүктесін табамыз: $\begin{cases} x+3y+2z-1=0 \\ \frac{x+5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2} \end{cases}$ y және z –ті x арқылы өрнектеп, $y-4=3x+15 \Rightarrow y=3x+19$ $z-6=2x+10 \Rightarrow z=2x+16$, жүйенің 1-теңдеуіне қойып,

$$\begin{cases} x+3(3x+19)+2(2x+16)-1=0 \\ y=3x+19 \\ z=2x+16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x=-88 \\ y=3x+19 \\ z=2x+16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{44}{4} \\ y=19-\frac{132}{7}=\frac{1}{7} \\ z=16-\frac{88}{7} \end{cases} \quad O(-\frac{44}{7},\frac{1}{7},\frac{24}{7})\text{-}$$ MM$^{/}$

кесіндісінің ортасы болып табылады. Ендеше

$$\begin{cases} \frac{x_{M'}+2}{2}=-\frac{44}{7} \\ \frac{y_{M'}-5}{2}=\frac{1}{7} \\ \frac{z_{M'}+7}{2}=\frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'}=-2-\frac{88}{7} \\ y_{M'}=\frac{2}{7}+5 \\ z_{M'}=\frac{48}{7}-7 \end{cases} \Rightarrow M^{/}(-\frac{102}{7},\frac{39}{7},-\frac{1}{7})$$

7. Өз беттеріңмен шығарыңдар

1. Жазықтықтың теңдеуін жаз және оны сал:

а) OXZ жазықтығына параллель және M_0(7,-3,5) нүктесі арқылы өтетін

б) OZ осі арқылы және A(-3,1,-2) арқылы өтетін

в) OX осіне параллель және екі нүкте M_1(4,0,-2), M_2(5,1,7) арқылы өтетін

г) B(2,1,-1) нүктесі арқылы өтетін және нормаль векторы n=(1,-2,3) болатын

д) C(3,4,-5) нүктесі арқылы өтетін және екі векторға параллель ***a***=(3,1,-1) и ***в***=(1,-2,1)

(*Жауаптары:*: ***а) y+3=0; б) x+3y=0; в)9y-z-2=0; г) x-2y+3z+3=0; д) x+4y+7z+16=0***)

2. Тетраэдрдің бір жағының теңдеуін жаз, егер оның төбелері A(5,4,3), B(2,3,-2), C(3,4,2),Д(-1,2,1).Алынған теңдеудің дұрыстығын тексер.

3.Жазықтықтың теңдеуін жаз:

а) M_1(1,1,1), M_2(2,3,4) нүктелері арқылы өтетін және ***2x-7y+5z+9=0*** жазықтығына перпендикуляр б) $M_0(7,-5,1)$ нүктесі арқылы өтетін және координат осьтерінен бірдей оң тең кесінділер қиып өтетін . (*Жауаптары* : а) 31***x + y - 11z – 21 =0*** ***б) x + y + z - 3=0)***

4. Жазықтықтар арасындағы бұрышты тап: ***x - 2y + 2z – 3=0*** и 3***x - 4y + 5 =0***

(*Жауабы*: $\cos\varphi = 11/15, \quad \varphi \approx 42^{\circ}51'$ *)*

5. 3x-y+7z-4=0 және 5x+3y-5z+2=0 жазықтықтары арасындағы екіжақты бұрышты қақ бөлетін жазықтықтың теңдеуін жаз. (*Жауабы*: x+2y-6z=0, 4x+y+z-1=0 .)